2.2 Klassische Testtheorie

Ziel: Finde Test zum Niveau α mit optimaler Güte (Power) für $\theta \in \Theta_1$. Dabei ist n finit.

2.2.1 Problemstellung

- Sei Θ der Parameterraum; die Hypothesen seien

$$H_0: \ \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \theta \in \Theta_1,$$

  mit $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, d.h. Θ_0 und Θ_1 sind disjunkt. Möglicherweise, jedoch nicht notwendigerweise, gilt $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

- Eine Nullhypothese heißt *einfach*, wenn sie aus einem einzelnen Element aus Θ besteht, d.h. $\Theta_0 = \{\theta_0\}$. Ansonsten spricht man von *zusammengesetzten* Hypothesen. Dabei ist Folgendes zu beachten: Etliche Nullhypothesen sind scheinbar einfach, aber tatsächlich zusammengesetzt. Dies ist häufig dann der Fall, wenn Nuisanceparameter auftauchen.

  Beispiel: Seien $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit μ und σ^2 unbekannt. Die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ ist eine zusammengesetzte Hypothese, da

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu \leq \infty, 0 < \sigma^2 < \infty\}$$

  und

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu = 0, 0 < \sigma^2 < \infty\}.$$

- Ergebnisse/Aktionen:

$$\begin{array}{ll} A_0: & H_0 \text{ wird nicht abgelehnt} \\ A_1: & H_0 \text{ wird abgelehnt} \end{array}$$

- Test zum Niveau α:

$$\mathbb{P}_\theta(A_1) \leq \alpha, \quad \text{für alle } \theta \in \Theta_0$$

- **Testfunktionen** (vgl. Abschnitt 1.2.1): Tests werden oft folgendermaßen formuliert: Wähle eine Teststatistik $T(X)$, eine Stichprobe X und einen kritischen Bereich C_α. Dann lautet der Test

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } T(x) \in C_\alpha \qquad (H_0 \text{ ablehnen}), \\ 0 & \text{, falls } T(x) \notin C_\alpha \qquad (H_0 \text{ nicht ablehnen}). \end{cases}$$

- Für die Testtheorie dieses Abschnitts werden solche Testfunktionen $\phi(x) \in \{0, 1\}$ erweitert zu *randomisierten Testfunktionen* $\phi(x) \in [0, 1]$:

  1. Für gegebene Daten $X = x$ ist $\phi(x) \in [0, 1]$.
  2. Ziehe eine (davon unabhängige) Bernoullivariable $W \sim \text{Bin}(1, \phi(x))$.
  3. Lehne H_0 genau dann ab, wenn $W = 1$.

Interpretation: $\phi(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung von H_0 gegeben die Beobachtung $X = x$. Im Spezialfall $\phi(x) \in \{0, 1\}$ reduziert sich ein randomisierter Test auf einen üblichen, nicht randomisierten Test. Randomisierte Tests sind (für die Theorie) vor allem bei diskreten Teststatistiken relevant.

Beispiel 2.21 (Randomisierter Binomialtest). *Sei $X \sim Bin(10, \pi)$ und*

$$H_0 : \pi \leq \frac{1}{2}, \quad H_1 : \pi > \frac{1}{2}.$$

Test: H_0 ablehnen $\Leftrightarrow$ $X \geq k_\alpha$, wobei k_α so, dass

$$\mathbb{P}_\pi(X \geq k_\alpha) \leq \alpha \quad \textit{für } \pi = \frac{1}{2}.$$

Es ist

$$\mathbb{P}_{0.5}(X \geq k) = \begin{cases} 0.00098 & , k = 10 \\ 0.01074 & , k = 9 \\ 0.05469 & , k = 8 \\ \ldots \end{cases}$$

Für $\alpha = 0.05$ würde die Wahl $k_\alpha = 8$ wegen $0.054 > 0.05$ nicht möglich sein. Wählt man aber $k_\alpha = 9$, so schöpft man $\alpha = 0.05$ bei weitem nicht aus, d.h. der Test ist sehr konservativ. Die Lösung ist ein randomisierter Test

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \{9, 10\} \\ 67/75 & , x = 8 \\ 0 & , x \leq 7, \end{cases}$$

d.h. ziehe bei $x = 8$ eine bernoulliverteilte Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeit $67/75$. Wird 1 realisiert, so wird H_0 abgelehnt.

Die Randomisierung ist ein künstlicher Vorgang, um das Signifikanzniveau α auszuschöpfen, d.h.

$$\mathbb{P}_\theta(A_1) = \alpha$$

für dasjenige θ auf dem Rand zwischen Θ_0 und Θ_1 zu erreichen. Ein randomisierter Test besitzt in der Regel folgende Struktur:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , x \in B_1 \\ \gamma(x) & , x \in B_{10} \\ 0 & , x \in B_0. \end{cases}$$

Der Stichprobenraum wird also in **drei** Teile zerlegt:

B_1 strikter *Ablehnungsbereich* von H_0, d.h. $x \in B_1 \Rightarrow$ Aktion A_1.

B_0 strikter *Annahmebereich*, d.h. $x \in B_0 \Rightarrow$ Aktion A_0.

B_{10} *Randomisierungsbereich*, d.h. $x \in B_{10}$ führt mit Wahrscheinlichkeit $\gamma(x)$ zur Ablehnung und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \gamma(x)$ zur Annahme von H_0. B_{10} kann als *Indifferenzbereich* interpretiert werden.

In der Regel wird ein Test mit einer Teststatistik $T = T(X)$ formuliert. Dann haben randomisierte Tests oft die Form:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, \ T(x) > c \\ \gamma, \ T(x) = c \\ 0, \ T(x) < c \ . \end{cases}$$

Falls $T(X)$ eine stetige Zufallsvariable ist, gilt $\mathbb{P}(T(X) = c) = 0$, d.h. für stetige T reduziert sich $\phi(x)$ zu

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, \ T(x) \geq c \\ 0, \ T(x) < c \ . \end{cases}$$

Bei diskreten Teststatistiken T wie beim exakten Binomialtest ist gewöhnlich $\gamma > 0$, da $\mathbb{P}(T(X) = c) > 0$. Der Wert c ist an der „Entscheidungsgrenze" zwischen A_1 und A_0. Dass man die Entscheidung durch eine zufällige Prozedur herbeiführt, stößt in der Praxis auf Bedenken.

Die (frequentistische) Theorie zeigt, dass die Priori-Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}_\theta(A_1) = \int_\mathcal{X} \underbrace{\mathbb{P}(A_1|x)}_{\phi(x)} \ \underbrace{f(x|\theta)dx}_{d\mathbb{P}_\theta} = \mathbb{E}_\theta[\phi(X)], \quad \theta \in \Theta_1$$

bei Randomisierung maximiert werden kann ($\phi(x)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, a posteriori, d.h. bei gegebener Stichprobe, für A_1 zu entscheiden). „Maximal" bezieht sich auf „durchschnittliche" Optimalität des Tests bei wiederholter Durchführung.

Subjektive Sichtweise: Man wird bei $T(x) = c$ bzw. $x \in B_{10}$ eher noch keine Entscheidung treffen („Indifferenzbereich").

Für $n \to \infty$ geht (in der Regel) $\mathbb{P}(T(X) = c)$ gegen 0, d.h. für großes n wird der Randomisierungsbereich B_{10} immer kleiner. Idee: Bei $T(x) = c$ zusätzliche Daten erheben.

Güte, Gütefunktion (power, power function)

Bei einer Testentscheidung gibt es folgende Möglichkeiten:

	A_0: H_0 beibehalten	A_1: H_1 ist signifikant
H_0 trifft zu	richtige Aussage	Fehler 1. Art
H_1 trifft zu	Fehler 2. Art	richtige Aussage

Es ist $\phi(x) = \mathbb{P}(A_1|x)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für A_1 gegeben die Stichprobe x. Ist $\mathbb{P}_\theta(A_1)$ die unbedingte Wahrscheinlichkeit / Priori-Wahrscheinlichkeit, dann gilt (wie oben)

$$\mathbb{P}_\theta(A_1) = \int_\mathcal{X} \mathbb{P}(A_1|x) f(x|\theta) \ dx = \int \phi(x) f(x|\theta) \ dx = \mathbb{E}_\theta[\phi(X)]$$

und somit auch $\mathbb{P}_\theta(A_0) = \mathbb{E}_\theta(1 - \phi(X))$ für $\theta \in \Theta$.

Definition 2.31 (Gütefunktion eines Tests ϕ).

1. *Die Abbildung* $g_\phi(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\phi(X)] = \mathbb{P}_\theta(A_1),\ \theta \in \Theta$, *heißt* Gütefunktion *des Tests* ϕ.

$$\begin{aligned} g_\phi(\theta) &= \mathbb{P}_\theta(A_1) \qquad \textit{Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art},\ \theta \in \Theta_0 \\ 1 - g_\phi(\theta) &= \mathbb{P}_\theta(A_0) \qquad \textit{Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art},\ \theta \in \Theta_1 \end{aligned}$$

   Außerdem:

$$g_\phi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(A_1) \qquad \textit{Macht (power) des Tests},\ \theta \in \Theta_1$$

2. *Die Größe*

$$\alpha(\phi) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(A_1) = \sup_{\theta \in \Theta_0} g_\phi(\theta)$$

   heißt (tatsächliches) Niveau (level, size) *von* ϕ *und ist die* supremale Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

$$\beta(\phi) = \sup_{\theta \in \Theta_1} \mathbb{P}_\theta(A_0) = 1 - \inf_{\theta \in \Theta_1} g_\phi(\theta)$$

   ist die supremale Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

- Bei den „üblichen" Tests (zum Beispiel beim einseitigen Gauß-Test) gilt wegen der Monotonie und Stetigkeit von $g_\phi(\theta)$

$$\alpha(\phi) + \beta(\phi) = 1,$$

  d.h. $\alpha(\phi)$ kann nur auf Kosten von $\beta(\phi)$ klein gehalten werden (und umgekehrt).
  Allgemein gilt dagegen nur

$$\alpha(\phi) + \beta(\phi) \leq 1$$

  (bei unverfälschten Tests, siehe Definition 2.37).

- *Programm der klassischen Testtheorie*: Maximiere unter Beschränkung

$$g_\phi(\theta) \leq \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta_0$$

  bei fest vorgegebenem $\alpha > 0$ die Güte für $\theta \in \Theta_1$, d.h.

$$g_\phi(\theta) \geq \max_{\widetilde{\phi}} g_{\widetilde{\phi}}(\theta) \quad \text{für } \theta \in \Theta_1$$

  bei „konkurrierenden" Tests $\widetilde{\phi}$. H_0 und H_1 werden also unsymmetrisch betrachtet.

- Wegen der Beziehung $\alpha(\phi) + \beta(\phi) = 1$ muss dabei das vorgegebene Signifikanzniveau α ausgeschöpft werden, d.h.

$$\alpha(\phi) = \alpha$$

  gelten. Bei $\alpha(\phi) < \alpha$ wird automatisch

$$\beta(\phi) = 1 - \inf_{\theta \in \Theta_1} g_\theta(\phi)$$

  für $\theta \in \Theta_1$ größer als notwendig, d.h. die Güte des Tests schlechter.

- Folgende Problemstellungen werden nach diesem Konzept betrachtet:
  1. *Einfaches H_0 vs. einfaches H_1*: Neyman-Pearson-Theorem zeigt, wie bester Test zu konstruieren ist.
  2. *Einfaches H_0 vs. zusammengesetztes H_1*: Basierend auf dem Neyman-Pearson-Theorem kann für bestimmte Fälle ein „gleichmäßig bester Test" (UMP, uniformly most powerful test) konstruiert werden. In anderen Fällen existiert — zumindest ohne weitere Restriktionen — kein UMP-Test.
  3. *Zusammengesetztes H_0 vs. zusammengesetztes H_1*: Suche nach einem UMP-Test ist noch schwieriger.

2.2.2 Satz von Neyman-Pearson

Problemstellung: Einfache Nullhypothese vs. einfache Alternativhypothese, also

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

mit $\theta_0 \neq \theta_1$. Sei $f_0(x) = f(x|\theta_0), f_1(x) = f(x|\theta_1)$. Dann heißt

$$\Lambda(x) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)}$$

Likelihood-Quotient. Ein (bester) Test hat nach Neyman-Pearson die Form:

$$H_0 \text{ ablehnen} \Leftrightarrow \Lambda(x) > k_\alpha$$

mit k_α so gewählt, dass der Test das Niveau α einhält. Aber: Falls $\Lambda(x)$ diskret ist, gibt es ein theoretisches Problem. Dies führt zu

Definition 2.32 (Randomisierter LQ-Test)**.** *Ein Test $\phi^*(x)$ heißt* randomisierter Likelihood-Quotienten-Test*, kurz* LQ-Test *(likelihood ratio test, LRT)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ *$\phi^*(x)$ hat die Struktur*

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & , f_1(x) > kf_0(x) \;\Leftrightarrow\; \Lambda(x) > k \\ \gamma(x) & , f_1(x) = kf_0(x) \;\Leftrightarrow\; \Lambda(x) = k \\ 0 & , f_1(x) < kf_0(x) \;\Leftrightarrow\; \Lambda(x) < k \end{cases}$$

mit Konstante $k > 0$ und $0 < \gamma(x) < 1$. Falls $\Lambda(X)$ stetig ist, gilt $\mathbb{P}_\theta(\Lambda(X) = k) = 0$. Dann reicht ein nicht-randomisierter Test

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, \; f_1(x) > kf_0(x) \;\Leftrightarrow\; \Lambda(x) > k \\ 0, \; \textit{sonst.} \end{cases}$$

Satz 2.33 (Neyman-Pearson, Fundamentallemma)**.**

1. *Optimalität: Für jedes k und $\gamma(x)$ hat der Test ϕ^* maximale Macht unter allen Tests, deren Niveau höchstens gleich dem Niveau von ϕ^* ist.*

2. *Existenz: Zu vorgegebenem $\alpha \in (0, 1)$ existieren Konstanten k^* und γ^*, so dass der LQ-Test ϕ^* mit diesem k^* und $\gamma(x) = \gamma^*$ für alle x exakt das Niveau α besitzt.*

3. *Eindeutigkeit: Falls ein Test ϕ mit Niveau α maximale Macht (= kleinsten Fehler 2. Art) unter allen anderen Tests mit Niveau α besitzt, dann ist ϕ ein LQ-Test (eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ von Stichproben x, d.h. $\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{X}_0) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\mathcal{X}_0) = 0$).*

Beweis.

1. Sei ϕ ein Test mit
$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi^*(X)] \tag{2.2}$$
und
$$U(x) = (\phi^*(x) - \phi(x))(f_1(x) - kf_0(x)).$$
   - Für $f_1(x) - kf_0(x) > 0$ ist $\phi^*(x) = 1$, also $U(x) \geq 0$.
   - Für $f_1(x) - kf_0(x) < 0$ ist $\phi^*(x) = 0$, also $U(x) \geq 0$.
   - Für $f_1(x) - kf_0(x) = 0$ ist $U(x) = 0$.

   Also: $U(x) \geq 0$ für alle x. Somit:
$$\begin{aligned}
0 &\leq \int U(x)dx \\
&= \int (\phi^*(x) - \phi(x))(f_1(x) - kf_0(x))\, dx \\
&= \int \phi^*(x) f_1(x)\, dx - \int \phi(x) f_1(x)\, dx + k\left(\int \phi(x) f_0(x)\, dx - \int \phi^*(x) f_0(x)\, dx\right) \\
&= \mathbb{E}_{\theta_1}[\phi^*(X)] - \mathbb{E}_{\theta_1}[\phi(X)] + \underbrace{k(\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(X)] - \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi^*(X)])}_{\leq 0 \text{ wegen } (2.2)}
\end{aligned}$$
   $\Rightarrow \mathbb{E}_{\theta_1}[\phi^*(X)] \geq \mathbb{E}_{\theta_1}[\phi(X)]$, d.h. die Macht von ϕ^* ist größer als die Macht von ϕ.

2. Die Verteilungsfunktion $G(k) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\Lambda(x) \leq k)$ ist monoton steigend in k. Sie ist ferner rechtsstetig, d.h.
$$G(k) = \lim_{y \downarrow k} G(y) \quad \text{für alle } k.$$
   Betrachtet man die Gleichung
$$G(k^*) = 1 - \alpha$$
   und versucht diese bezüglich k^* zu lösen, so gibt es zwei Möglichkeiten:

   (i) Entweder ein solches k^* existiert,

   (ii) oder die Gleichung kann nicht exakt gelöst werden, aber es existiert ein k^*, so dass
$$G_-(k^*) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\Lambda(X) < k^*) \leq 1 - \alpha < G(k^*)$$
   (das entspricht der „Niveaubedingung").

   Im ersten Fall setzt man $\gamma^* = 0$, im zweiten
$$\gamma^* = \frac{G(k^*) - (1-\alpha)}{G(k^*) - G_-(k^*)}.$$

In diesem Fall hat der Test genau das Niveau α, wie behauptet, denn:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(X)] &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f_1(X)}{f_0(X)} > k^*\right) + \frac{G(k^*) - 1 + \alpha}{G(k^*) - G_-(k^*)}\mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f_1(X)}{f_0(X)} = k^*\right) \\
&= (1 - G(k^*)) + \frac{G(k^*) - 1 + \alpha}{G(k^*) - G_-(k^*)}(G(k^*) - G_-(k^*)) \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

3. Zu gegebenem α sei ϕ^* der nach 2. existierende LQ-Test definiert durch eine Konstante k und eine Funktion $\gamma(x)$. Man nehme an, ϕ ist ein anderer Test mit gleichem Niveau α und der gleichen (nach 1. maximalen) Macht wie ϕ^*. Definiert man $U(x)$ wie in 1., dann ist $U(x) \geq 0$ für alle x und $\int U(x)\, dx = 0$, da $\mathbb{E}_{\theta_1}[\phi^*(X)] - \mathbb{E}_{\theta_1}[\phi(X)] = 0$ und $\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi^*(X)] - \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(X)] = 0$ nach Annahme. Daraus, dass U nicht-negativ mit Integral 0 ist, folgt, dass $U(x) = 0$ für fast alle x. Dies wiederum bedeutet, dass $\phi(x) = \phi^*(x)$ oder $f_1(x) = kf_0(x)$, d.h. $\phi(x)$ ist ein LQ-Test (für fast alle x). □

Bemerkung. *Für einfache Hypothesen H_0 und H_1 sind klassische Testtheorie und Likelihood-Quotienten-Test noch identisch. Für zusammengesetzte Hypothesen (der Praxisfall) trennen sich die Konzepte:*

- *Klassische Testtheorie sucht weiter nach optimalen Tests (für finite Stichproben).*
- *Likelihoodbasierte Tests verallgemeinern $\Lambda(x)$ bzw. sind quadratische Approximationen von $\Lambda(x)$, deren Verteilungsfunktion (unter H_0) nur asymptotisch ($n \to \infty$) gilt.*

Beispiel 2.22 (Binomialtest)**.** *Betrachte*

$$H_0 : \pi = \pi_0 \quad vs. \quad H_1 : \pi = \pi_1$$

mit $0 < \pi_0 < \pi_1 < 1$. Die Dichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) der i.i.d. Stichprobe $X = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ lautet

$$f(x|\pi) = \pi^z(1-\pi)^{n-z} \quad mit \quad z = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

der Likelihood-Quotient

$$\Lambda(x) = \frac{\pi_1^z(1-\pi_1)^{n-z}}{\pi_0^z(1-\pi_0)^{n-z}} = \left(\frac{1-\pi_1}{1-\pi_0}\right)^n \cdot \left(\frac{\pi_1(1-\pi_0)}{\pi_0(1-\pi_1)}\right)^z := \Lambda(z).$$

Da $\Lambda(x) = \Lambda(z)$ streng monoton in z ist, lässt sich $\Lambda(z) > k$ äquivalent umformen in $z > \Lambda^{-1}(k) =: c$. Der Likelihood-Quotienten-Test ϕ^* mit kritischer Zahl k und (konstanter) Randomisierung γ^* hat dann die Form

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & , Z = Z(x) > c \\ \gamma^* & , Z = Z(x) = c \\ 0 & , Z = Z(x) < c \end{cases}$$

mit der „Teststatistik" Z. Dabei können wir uns (wegen des Wertebereichs von Z) auf $c \in \{0, 1, \ldots, n\}$ beschränken. γ^* ist aus der Niveaubedingung

$$\mathbb{P}_{\pi_0}(Z > c) + \gamma^*\mathbb{P}_{\pi_0}(Z = c) \overset{!}{=} \alpha$$

zu bestimmen. Der Test ϕ^* hängt von π_0 ab, jedoch nicht von π_1!

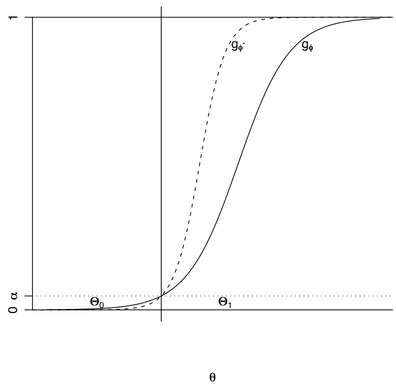
Bemerkung. *Falls H_1 wahr ist, dann bestimmt π_1 die Wahrscheinlichkeit für den „realisierten" Fehler 2. Art $\mathbb{P}_{\pi_1}(A_0)$. Je weiter π_1 von π_0 entfernt ist, umso kleiner ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art und umso größer ist die Power an der Stelle $\pi = \pi_1$.*

2.2.3 Gleichmäßig beste Tests

Definition 2.34 (Gleichmäßig bester (UMP, uniformly most powerful) Test)**.** *Ein Niveau-α-Test ϕ^* heißt* gleichmäßig bester *oder* UMP Test *zum Niveau α* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

1. $\mathbb{E}_\theta[\phi^*(X)] \leq \alpha$ *für alle $\theta \in \Theta_0$.*
2. *Für jeden anderen Niveau-α-Test ϕ mit $\mathbb{E}_\theta[\phi(X)] \leq \alpha$ für alle $\theta \in \Theta_0$ gilt:*

$$\mathbb{E}_\theta[\phi^*(X)] \geq \mathbb{E}_\theta[\phi(X)] \text{ für alle } \theta \in \Theta_1.$$



Bemerkung. *Der Begriff „gleichmäßig" in obiger Definition bezieht sich auf die Gleichmäßigkeit der Eigenschaft $g_{\phi^*} \geq g_\phi$ auf Θ_1 für jeden anderen Test ϕ.*

Beste einseitige Tests bei skalarem θ

In Beispiel 2.22 (Binomialtest für einfache Hypothesen) hing der Test ϕ^* nicht vom speziellen $\pi_1(\equiv H_1) > \pi_0(\equiv H_0)$ ab. Daraus folgt, dass ϕ^* für alle $\pi_1 > \pi_0$ besser ist als ein anderer Test ϕ. Entscheidend dafür ist, dass der Dichte- bzw. Likelihood-Quotient monoton in z ist. Dies gilt allgemeiner und führt zu folgender Definition.

Definition 2.35 (Verteilungen mit monotonem Dichtequotienten)**.** *Die Verteilungsfamilie $\{f(x|\theta),\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ mit skalarem Parameter θ besitzt* monotonen Dichte- *bzw.* Likelihood-Quotienten *(kurz: MLQ)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ *es existiert eine Statistik T, so dass*

$$\Lambda(x) = \frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_0)}$$

monoton wachsend in $T(x)$ für je zwei $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ mit $\theta_0 \leq \theta_1$ ist.

Bemerkung.

1. *Monoton* wachsend *ist keine echte Einschränkung; ist* $\Lambda(x)$ *monoton fallend in* $\widetilde{T}(x)$*, so definiert man* $T(x) = -\widetilde{T}(x)$.

2. *Jede* einparametrische *Exponentialfamilie in* $T(x)$ *und* $\gamma(\theta)$ *besitzt monotonen Dichtequotienten, wenn* $\gamma(\theta)$ *monoton in* θ *ist. Letzteres gilt insbesondere für die* natürliche *Parametrisierung* $\gamma(\theta) = \theta$.

Satz 2.36 (UMP-Test bei MLQ). *Gegeben sei* $\mathcal{P}_\theta = \{f(x|\theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ *mit MLQ in* $T(x)$ *und die Hypothesen*

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta > \theta_0.$$

1. *Existenz: Es gibt einen UMP-Test* ϕ^* *zum Niveau* α*, nämlich*

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c \\ \gamma, & T(x) = c \\ 0, & T(x) < c. \end{cases}$$

   Dabei sind c *und* γ *eindeutig bestimmt durch die Niveaubedingung*

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi^*(X)] = \mathbb{P}_{\theta_0}(T(X) > c) + \gamma\mathbb{P}_{\theta_0}(T(X) = c) = \alpha.$$

2. *Die Gütefunktion* $g_{\phi^*}(\theta)$ *ist monoton wachsend in* θ *und sogar streng monoton wachsend für alle* θ *mit* $0 < g_{\phi^*}(\theta) < 1$*. Die maximale Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ist* $g_{\phi^*}(\theta_0) = \alpha$.

3. ϕ^* *besitzt auch gleichmäßig minimale Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. Art unter allen Tests* ϕ *für* H_0 *vs.* H_1 *mit* $g_\phi(\theta_0) = \alpha$.

4. ϕ^* *ist (mit Wahrscheinlichkeit 1) eindeutig bestimmt.*

Bemerkung. *Es gilt weiterhin: Ist* ϕ^* *der beste Test für das einfache Alternativproblem*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta = \theta_1,$$

so ist ϕ^* *auch der UMP-Test zum Niveau* α *für zusammengesetzte Hypothesen*

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

wenn ϕ^* *nicht von dem speziellen Wert* $\theta_1 \in H_1$ *abhängt und für alle* $\theta \in H_0$ *das Niveau* α *einhält.*

Beispiel 2.23.

1. *Binomialtest mit* $H_0 : \pi \leq \pi_0$ *gegen* $H_1 : \pi > \pi_0$ *hat MLQ in* $Z(x) =$ *"Anzahl der Erfolge" (vgl. obiges Beispiel und Bemerkung). Der Binomialtest ist also UMP-Test.*

2. *Gleichverteilung*

3. *Gauß-Test*

4. *Exponentialverteilung*
5. *Poissonverteilung*

Bemerkung. *Oft existiert zwar kein UMP-Test, jedoch ein lokal bester (einseitiger) Test:* ϕ_{lok} *heißt* lokal bester Niveau α-Test $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$g'_{\phi_{lok}}(\theta_0) = \frac{d}{d\theta} g_{\phi_{lok}}(\theta_0) \geq \frac{d}{d\theta} g_{\phi}(\theta_0),$$

wobei $g_{\phi_{lok}}(\theta_0) = g_{\phi}(\theta_0) = \alpha$ *gilt.*

Beste unverfälschte zweiseitige Tests bei skalarem θ

Für zweiseitige Testprobleme der Form

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

gibt es in der Regel keinen UMP-Test, insbesondere auch dann nicht, wenn MLQ vorliegt. Deshalb wird eine Restriktion auf eine kleinere Klasse von konkurrierenden Tests notwendig.

Definition 2.37 (Unverfälschter Niveau-α-Test)**.** *Ein Test* ϕ *für* H_0 *vs.* H_1 *heißt* unverfälschter (unbiased) Niveau-α-Test $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$g_{\phi}(\theta) \leq \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta_0, \quad g_{\phi}(\theta) \geq \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta_1.$$

Satz 2.38 (Zweiseitige UMPU (uniformly most powerful unbiased) Tests)**.** *Sei*

$$f(x|\theta) = c(\theta) \exp(\theta T(x)) h(x)$$

eine einparametrische Exponentialfamilie mit natürlichem Parameter $\theta \in \Theta$ *(*Θ *sei ein offenes Intervall) und Statistik* $T(x)$*. Dann ist*

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & , T(x) < c_1 \\ \gamma_1 & , T(x) = c_1 \\ 0 & , c_1 < T(x) < c_2 \\ \gamma_2 & , T(x) = c_2 \\ 1 & , T(x) > c_2 \end{cases}$$

ein UMPU-Test zum Niveau α *unter allen unverfälschten Tests* ϕ *zum Niveau* α *für das Testproblem* $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$*. Dabei werden* $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ *aus*

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi^*(X)] = \alpha, \quad \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi^*(X) T(X)] = \alpha \mathbb{E}_{\theta_0}[T(X)]$$

bestimmt.

Beispiel 2.24.

1. *Zweiseitiger Binomial-Test*

$$H_0 : \pi = \pi_0 \quad vs. \quad H_1 : \pi \neq \pi_0$$

ist UMPU-Test.

2. *Zweiseitiger Gauß-Test mit* $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 *bekannt, ist für*

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1: \ \mu \neq \mu_0$$

UMPU-Test.

3. *Zweiseitiger Poisson-Test: Bei* $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Po(\lambda)$

$$H_0: \ \lambda = \lambda_0 \quad vs. \quad H_1: \ \lambda \neq \lambda_0$$

liegt eine einparametrische Exponentialfamilie mit natürlichem Parameter $\theta = \log \lambda$ *vor. Äquivalente Hypothesen in* θ *sind*

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0.$$

Bestimmung der Prüfgröße:

$$\begin{aligned} f(x_i|\theta) &= h(x_i) c(\theta) \exp(\theta x_i) \\ f(x|\theta) &= f(x_1|\theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n|\theta) \propto \exp\Big(\theta \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{T(x)}\Big) \end{aligned}$$

und somit

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & , \sum_{i=1}^n x_i < c_1 \\ \gamma_1 & , \sum_{i=1}^n x_i = c_1 \\ 0 & , c_1 < \sum_{i=1}^n x_i < c_2 \\ \gamma_2 & , \sum_{i=1}^n x_i = c_2 \\ 1 & , \sum_{i=1}^n x_i > c_2 \, . \end{cases}$$

4. *Zweiseitiger* χ^2*-Test auf die Varianz: Seien* $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2), \mu$ *bekannt. Getestet wird*

$$H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1: \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

Mehrparametrische Verteilungsannahme

- Bislang: θ skalar.
  - $\Rightarrow$ $\theta = (\mu, \sigma^2)$ ist bei $N(\mu, \sigma^2)$ Verteilung nicht in der Theorie optimaler Tests enthalten.
  - $\Rightarrow$ t-Test auf μ (bei unbekanntem σ^2) und andere sind nicht erfasst.
- Idee: „Optimale" Tests lassen sich (noch) für eine skalare Komponente η von $\theta = (\eta, \xi)$, wobei ξ mehrdimensional sein darf, konstruieren. ξ ist als Stör-/Nuisanceparameter zu betrachten.
- Voraussetzung an Verteilungsfamilie: $\{f(x|\theta), \ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}$ ist eine (strikt) k-parameterische Exponentialfamilie mit natürlichem Parameter $\theta = (\eta, \xi)$ und $T = (U, V)$, U skalar. Dies führt auf die Theorie bedingter Tests.