Aufgabe 6 (Minimalsuffizienz)

Sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ ein Zufallsvektor mit $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),\ i = 1 \ldots, n,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) μ unbekannt, σ^2 bekannt: $T(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist minimalsuffizient für μ.

(b) μ bekannt, σ^2 unbekannt: $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ ist minimalsuffizient für σ^2.

(c) μ unbekannt, σ^2 unbekannt: $T(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)$ ist minimalsuffizient für (μ, σ^2).

Aufgabe 7 (Zulässigkeit)

Betrachten Sie die i.i.d. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ eines $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Untersuchungsmerkmals X mit bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$ und unbekanntem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$. Berechnen und skizzieren Sie den erwarteten quadratischen Fehler der folgenden Schätzfunktionen für μ:

$$T_1(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{und} \qquad T_2(\boldsymbol{X}) = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i + a,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (0, 1)$. Kann man anhand der Skizze $T_1(\boldsymbol{X})$ oder $T_2(\boldsymbol{X})$ als zulässigen oder als unzulässigen Schätzer identifizieren?

Aufgabe 8 (Vollständigkeit)

Betrachten Sie die i.i.d. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ zur $\mathrm{Bin}(1, \pi)$-verteilten Zufallsvariable X mit $\pi \in (0, 1)$. Zeigen Sie: $T(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist vollständig für π.
Hinweis: Verwenden Sie dabei folgenden Spezialfall des Identitätssatzes für Polynome:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \text{ für alle } x \in (0, \infty) \ \Leftrightarrow\ a_k = 0 \text{ für } k = 0, \ldots, n.$$