Hinweis: Nach einer kurzen Wiederholung der Bayes-Statistik soll diese Aufgabe im Tutorium selbstständig gelöst werden. Die Lösung wird am Ende vorgestellt.

Aufgabe 2

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ eine i.i.d. Stichprobe einer exponentialverteilten Zufallsvariablen $X|\lambda \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

Mit der Exponentialverteilung werden typischerweise Wartezeiten modelliert. Nehmen wir an, ein Meteorologe interessiert sich für die erwartete Wartezeit bis zum nächsten Gewitter. Dazu beobachtet er über einen gewissen Zeitraum das Wetter und notiert sich die Zeit zwischen zwei Gewittern. Aus n Beobachtungen möchte er die erwartete Wartezeit schätzen. Hierzu benötigt er die Hilfe eines Statistikers:

(a) Stellen Sie die Likelihood auf und bestimmen Sie den ML-Schätzer. Bezüglich welcher Variable ist die Likelihood eine Funktion? Wie kommt man von $\hat{\lambda}$ auf die erwartete Wartezeit?

(b) Versuchen Sie, aus der Form der Likelihood die zur Exponentialverteilung konjugierte Verteilung zu bestimmen. (Tipp: Beachten Sie auch den Träger des unbekannten Stichprobenparameters λ.)

(c) Bestimmen Sie die Posteriori-Verteilung von $\lambda|\boldsymbol{x}$.

(d) Bestimmen Sie Posteriori-Modus und Posteriori-Erwartungswert von $\lambda|\boldsymbol{x}$. Ist die Posteriori-Verteilung symmetrisch?

(e) Woraus setzt sich der Posteriori-Erwartungswert zusammen? Was bedeutet das für die Wahl der Parameter der Priori?