Aufgabe 1 (Exponentialfamilie)

(a) Die Zufallsvariable X sei poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von X zur Exponentialfamilie gehört.

(b) $X_1, \dots, X_n$ seien i.i.d. Zufallsvariablen mit $X_i \sim \text{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$, für $i = 1, \dots, n$. Sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von $\boldsymbol{X}$ zur Exponentialfamilie gehört.

Aufgabe 2 (Bayesinferenz: Poissonverteilung)

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ eine i.i.d. Stichprobe einer poissonverteilten Zufallsvariablen $X|\lambda \sim \text{Po}(\lambda)$ und a priori $\lambda \sim \mathcal{G}a(\alpha, \beta)$ für $\alpha, \beta > 0$, d.h.

$$p(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda).$$

(a) Bestimmen Sie die Posteriori-Verteilung von $\lambda|\boldsymbol{x}$.

(b) Berechnen Sie den Posteriori-Erwartungswert von $\lambda|\boldsymbol{x}$ und schreiben Sie ihn als gewichtetes Mittel des ML-Schätzers und des Priori-Erwartungswerts.

Aufgabe 3 (Likelihood- und Bayesinferenz: Geometrische Verteilung)

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ eine i.i.d. Stichprobe einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen $X|\pi \sim G(\pi)$. Die Parametrisierung der geometrischen Verteilung sei dabei so, dass

$$P(X = k) = (1 - \pi)^{k-1}\pi \qquad \text{für } k \in \mathbb{N},$$

d.h. die Verteilung modelliert eine Anzahl an Versuchen bis *einschließlich* zum ersten Erfolg.

(a) Berechnen Sie den ML-Schätzer für π.

(b) Sei jetzt a priori $\pi \sim \mathcal{B}e(\alpha, \beta)$ für $\alpha, \beta > 0$. Berechnen Sie die Posteriori-Verteilung von $\pi|\boldsymbol{x}$.

(c) Lässt sich der Posteriori-Erwartungswert von $\pi|\boldsymbol{x}$ in geeigneter Weise als gewichtetes Mittel des ML-Schätzers und des Priori-Erwartungswerts darstellen?

Aufgabe 4 (Lokations- und Skalenfamilie & Likelihoodinferenz: Logistische Verteilung)

Sei X logistisch verteilt mit Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}_+$. Die Dichte der logistischen Verteilung lautet

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)}{b\left(1+\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right)^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\mathrm{E}(X) = a$ und $\mathrm{Var}(X) = b^2\pi^2/3$.

(a) Zeigen Sie, dass die logistische Verteilung zur Lokations- und Skalenfamilie gehört.

(b) Sei $b = 1$. Zeigen Sie, dass die Log-Likelihood-Funktion, die Scorefunktion und die beobachtete Fisher-Information von a für eine Beobachtung x wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned}
\ell(a|x) &= a - x - 2\log\bigl(1+\exp(a-x)\bigr) \\
s(a|x) &= 1 - \frac{2\exp(a-x)}{1+\exp(a-x)} \\
J(a|x) &= \frac{2\exp(a-x)}{(1+\exp(a-x))^2}\ .
\end{aligned}$$

(c) Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. wie X. Berechnen Sie den $\mathrm{Bias}_a(\widehat{a})$ und den $\mathrm{MSE}_a(\widehat{a})$ von $\widehat{a} = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$.