

### Aufgabe 1

Herleitungen aus der Vorlesung.

- (a) Leiten Sie die gemeinsame Posteriori der festen und zufälligen Effekte  $p(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b} | \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}) p(\boldsymbol{\beta}) p(\mathbf{b})$  unter der Annahme von Normalverteilungen her.

*Hinweis:* Die Lösung ist

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \Big| \mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}}) \text{ mit}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}} = (\mathbf{C}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{A})^{-1}; \quad \mathbf{C} = [\mathbf{X} | \mathbf{Z}]; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}} (\tilde{\mathbf{m}} + \mathbf{C}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}); \quad \tilde{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- (b) Leiten Sie die vollständig bedingte Dichte der festen Effekte  $p(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{b}, \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\vartheta}) p(\boldsymbol{\beta})$  her.

### Aufgabe 2

Betrachten Sie folgendes Modell für den Datensatz mit den 100m-Läufen (vgl. Blatt 2):

$$\mathbf{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{sex}_i + b_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 20, \quad \mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{i3})'$$

$$b_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \tau^2), \quad \varepsilon_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}), \quad b_i, \varepsilon_i \text{ unabhängig}$$

- (a) Fitten Sie das Modell mit REML-Schätzung.
- (b) Schätzen Sie das Modell bayesianisch.  
*Hinweis:* Verwenden Sie die Funktion `MCMCglmm()` aus dem R-Paket `MCMCglmm`
- (c) Vergleichen Sie die Schätzer für die festen Effekte zwischen dem mit REML und mit MCMC geschätzten Modell. Betrachten Sie im bayesianischen Modell Posteriori-Modus, -Erwartungswert und -Median. Vergleichen Sie die Schätzungen auch mit den wahren Werten.  
*Hinweis:* Das Element `s01` im ausgegebenen Modell sind die Ziehungen aus der Posteriori-Dichte; Aufruf über `mod$s01`
- (d) Vergleichen Sie die Schätzungen für die Varianzkomponenten  $\tau^2$  und  $\sigma^2$  aus den beiden Modellen und vergleichen Sie sie mit den wahren Werten.  
*Hinweis:* `mod$VCV` enthält die posteriori der Varianzkomponenten
- (e) Vergleichen Sie die Prognosen für die zufälligen Effekte aus den beiden Modellen.
- (f) Berechnen Sie die HPD-Intervalle (Highest probability density interval) für die festen und zufälligen Effekte.  
*Hinweis:* Funktion `HPDinterval()`
- (g) Lassen Sie sich diagnostische Graphiken zu den MCMC-Ketten ausgeben.  
*Hinweis:* `plot()`-Funktion auf `mod$s01` und `mod$VCV` anwenden