**Gemischte Modelle** Wintersemester 2015/2016

Vorlesung *Prof. Dr. Sonja Greven*

Übung *Sarah Brockhaus* **Thema 3**

## Aufgabe 1

Herleitungen aus der Vorlesung.

(a) Hendersons Schätzgleichungen sind:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{G}^{-1})\hat{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist zu der Darstellung $(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A})\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{b}}\end{pmatrix} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y}$,

mit $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z})$ und $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{-1}\end{pmatrix}$.

Geben Sie basierend auf dieser zweiten Darstellung die Lösung der Schätzgleichungen an.

(b) Leiten Sie darauf aufbauend die Kovarianzmatrix von $\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ her.

*Hinweis:* Setzen Sie für $\boldsymbol{y}$ die Modellgleichung ein.

(c) Leiten Sie $\text{Cov}\left(\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{b}}\end{pmatrix} |\boldsymbol{b}\right)$ her.

## Aufgabe 2

Betrachten Sie erneut den Datensatz zum Blutdruck, der bereits auf Blatt 1 und Blatt 2 Thema war. Als Signifikanzniveau wird in dieser Aufgabe $\alpha = 5\%$ verwendet.

(a) Fitten Sie folgendes Modell in R, wobei $\text{gender}_i = 0$, falls Person $i$ weiblich und $\text{gender}_i = 1$ falls Person $i$ männlich ist.

$$\begin{aligned} \text{SBD}_{ij} &= \beta_1 I(\text{gender}_i = 0) + \beta_2 I(\text{gender}_i = 1) \\ &\quad + \beta_3 \text{dosis}_{ij} I(\text{gender}_i = 0) + \beta_4 \text{dosis}_{ij} I(\text{gender}_i = 1) + b_i + \varepsilon_{ij}, \\ &\quad b_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \tau^2),\ \varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ \ b_i,\ \varepsilon_{ij} \text{ unabhängig} \end{aligned}$$

(b) Testen Sie die Hypothese $H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$. Was bedeutet diese Hypothese inhaltlich?

(c) Testen Sie die Hypothese $H_0 : \beta_3 = \beta_4$. Was bedeutet diese Hypothese inhaltlich?

(d) Testen Sie ob die zufälligen Intercepts im Modell enthalten sein sollen. Formulieren Sie dazu die Nullhypothese und führen Sie den Test approximativ und exakt durch.
*Hinweis*: Funktion `exactRLRT()` aus dem R-Paket RLRsim.

(e) Fitten Sie ein Modell, das zusätzlich für jede Person eine zufällige Steigung enthält, wobei zufälliger Intercept und zufällige Steigung korreliert sein können. Führen Sie einen approximativen Test durch, ob die zufällige Steigung im Modell enthalten sein soll.

(f) *Zusatzaufgabe*: Führen Sie den Test für die zufällige Steigung mit der Funktion `exactRLRT()` durch. Beachten Sie, dass random intercepts und slopes unabhängig sein müssen, damit `exactRLRT()` angewendet werden kann.

(g) Berechnen Sie das konditionale AIC (cAIC) für das Modell aus (a) und aus (e). Welches Modell wird laut cAIC bevorzugt?
*Hinweis*: Funktion `cAIC()` aus dem R-Paket cAIC4.